等径超曲面今昔 : Elie Cartanと21世紀 (部分多様体の幾何学)

宮岡, 礼子

数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 32-44

等径超曲面今昔

-Élie Cartan と 2 1 世紀-

上智大学　宮岡礼子 (Reiko Miyaoka)
Sophia University

1 序

等径超曲面については最近，数学 **53** [22] に多くのことを書いたので，ここでは主として Élie Cartan の仕事と，[22] に書かなかった Gauss 写像の退化性や，スペシャルラグランジアン部分多様体論との関係についてふれることにする．等径超曲面の一般的解説については [27],[33] も参照していただきたい．

Élie Cartan は 1938-1940 年にかけて，等径超曲面に関する論文を 4 篇書いている．等径超曲面の研究は Cartan 以前にも行われていて，前期，中期，後期と大きく 3 つにわけられる．前期（1918-1924）には幾何光学の立場からイタリアの Laura, Somigliana, B. Segre による論文がそれぞれ 1918,1919,1924 年にかかれた [16], [30], [28]．ここでは $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ 上の関数 $\phi(x,y,z;t)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\triangle\phi$$

の解で，ϕ のレベル集合が互いに平行であるようなものが研究され，これらの波面は平面か，同心球面，または円柱面しかないことが，Somigliana により示された．Segre はこの結果を，$\mathbb{R}^3$ の曲面族に対し，各曲面上で定数となる任意の関数 f が，$\triangle f$ も曲面上で一定であるという性質をみたすなら，曲面族は上の 3 つしかないという形に拡張した．応用として $\mathbb{R}^3$ の熱伝導が 1 次元に還元されるのは等温面がこれらの場合のみであるという結果が得られる．

これに続く中期（1937-1940）には Levi-Civita [18] が独立に同じことを $\mathbb{R}^3$ で証明し（1937），これをみた B. Segre が手紙 [29] で Somigliana の結果を Levi-Civita に知らせて (1938)，この手紙の中で類似の結論が $\mathbb{R}^n$ でも成立することを示した．等径超曲面（isoparametric hypersurface）という名前は Levi-Civita によりつけられたもののようである．1938 年，É. Cartan はこの問題を n 次元単連結空間型 $M(c)$ の中で統一的に扱い，顕著な結果を導いた．Levi-Civita が $\mathbb{R}^3$ 上で考えた第 1，第 2 ベルトラミ微分径数 $\triangle_1 f = |\mathrm{grad} f|^2$, $\triangle_2 f = \triangle f$ がまた f の関数になっているような関数 f を $M(c)$ 上で考え，等径関数とよぶ．そのレベル面を等径超曲面，その 1 径数族を等径超曲面族とよぶ．主要な結果として，球面内には上記の 3 種以外にも等径超曲面が存在することが示された．

後期は 1970 年以降から現在に至る期間である．Münzner は等径超曲面の大域的位相の考察を行って重要な結果を導き，尾関-竹内 は初めて非等質な例の存在を示し，Ferus-Karcher-Münzner はこれらを Clifford 代数の観点から統一した．

2　等径超曲面に関する Élie Cartan の仕事

Élie Cartan は $M(c) = \mathbb{R}^n, H^n, S^n$ (それぞれ $c = 0, -1, 1$) の等径超曲面を統一的に考察し，次の結果を得た．上で定義した等径関数について，

Proposition 2.1 [3] $f : M(c) \to \mathbb{R}$ が等径関数 $\Leftrightarrow$ f のレベル面はすべて平均曲率一定 $\Leftrightarrow$ f のレベル面は主曲率一定

Corollary 2.2 任意の主曲率一定の超曲面 M に対し，ある等径関数が存在して，M はそのレベル面．

このことは定主曲率をもつという局所的性質から，大域的性質が得られるという点で興味深い．さて，次の基本公式も Élie Cartan によるものである．

Proposition 2.3 [5] $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ を等径超曲面の相異なる主曲率，$m_1, \ldots, m_g$ をそれぞれの重複度とすると，各 i, $1 \leq i \leq g$ に対し，次式が成り立つ．

$$\sum_{1 \leq j \leq g, j \neq i} \frac{(c + \lambda_i \lambda_j) m_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0.$$

この公式から次のことが得られる．

Corollary 2.4 $g \geq 3 \Rightarrow c > 0$.

すなわち，$\mathbb{R}^n, H^n$ の等径超曲面は高々2個の主曲率をもち，これからもCartan 以前の等径超曲面の分類が得られる．さらに Cartan は言及していないが，この公式は等径超曲面の焦部分多様体が極小部分多様体であることを同時に示している（[25]，4.1 参照）．

球面内の等径超曲面に関して，Cartan はまず S^4 に $g=3$ の等径超曲面族がただひとつ存在することを示し，それを 5 変数の 3 次斉次多項式で記述した [3]．次に $\mathbb{R}^{n+2}$ 上の 3 次斉次多項式で与えられる調和関数の中から等径関数を探し，その存在が，Hurwitz 代数と関係することを示すことにより，これが $n = 3, 6, 12, 24$ の時にのみ存在することに気づいた [4]．そしてこの関数を不変に保つ $\mathbb{R}^{n+2}$ の直交群を求める中で，“$n = 24$ は特に面白い，なぜならここには 7 次元楕円型空間の 3 対原理とスピノールの理論があらわれ，52 次元の例外型単純群が幾何学と解析に初めて登場するから” と序文にかいた．現在 Cartan 超曲面と呼ばれているこれらの超曲面は，位相的には各々 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 上の射影平面上の球面束となっている．いま $\mathbb{K}$ を上のいずれかとし，

$$H(3,\mathbb{K}) = \{X \in M(3,\mathbb{K}) \mid X = X^*\}, \quad M(3,\mathbb{K}) \text{ は 3 次正方行列}$$

の二つの元 X, Y の Jordan 積

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

に関する Jordan 代数を考えると，その自己同型群はそれぞれ，$SO(3)$, $SU(3)$, $Sp(3)$, F_4 の随伴作用で得られる．ここで Cartan を魅了したのは今ではケーリー射影平面の等長群として知られる 52 次元の例外群 F_4 の出現である．このとき軌道は $M = F_4/Spin(8)$ と表せるが，これは対称空間 E_6/F_4 のイソトロピー表現の軌道で，M のイソトロピー群 $Spin(8)$ の作用で T_pM が $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ と 3 つの固有空間に分解される．各固有空間 E_i への $Spin(8)$ の作用は各々異なり，ひとつはベクトル空間へ通常の作用，他の二つは Half Spinor の 2 つの異なる作用となっていて，これは 3 対原理とよばれる．さらに特異軌道は $M_{\pm} = F_4/Spin(9)$ で表されるケーリー射影平面で，$Spin(9)$ の $T_p^{\perp}M_+(\cong \mathbb{R}^9)$ への作用は通常のもの，$T_pM_+(\cong \mathbb{R}^{16})$ への作用はスピン表現になっている．このように単純群の分類から得られていた例外群 F_4 とその表現が幾何学に登場したことは Cartan をことのほか喜ばせたようである．Cartan は

1．$g=3$ の等径超曲面は $m_1=m_2=m_3$ をみたす．

2．一般に同じ重複度の g 個の主曲率をもつ等径超曲面の等径関数は g 次の斉次多項式で

$$\triangle_1 F = g^2(x_1^2 + \dots x_{n+2}^2)^{g-1}$$

を満たす

という事実を示し，$g=3$ の等径超曲面が Jordan 代数上の随伴軌道で与えられることを証明した．なお，Cartan 超曲面は 1901 年に Severi が発見した Severi variety とよばれる 4 種の射影ヴァラエティの実部となっていて，これらは Gauss 写像の退化性，代数幾何的には余次元の低い埋め込みの観点からも重要なヴァラエティである [36].

次に Cartan がとりくんだのは $g=4$ の場合で，主曲率が同じ重複度を持つならば等径超曲面は S^5 と S^9 にしか存在しないことを証明なしで述べた（論文には，再現できないほどの長い計算で得られた結果，と書かれている）．これは後に，重複度 1 のときは高木 [32]，2 のときは尾関-竹内 [26] により証明され，等しい重複度を持つものがこれだけであることは Grove-Helperin により示された [11].

ここまでの研究で，Cartan は次の問題を提出し，その後はこの研究から遠ざかってしまった．

1．各 g に対し，同じ重複度の g 個の主曲率を持つ等径超曲面は存在するか？

2．$g \geq 4$ で重複度の異なる主曲率をもつ等径超曲面はあるか？

3．等径超曲面は等質か？

3 Cartan 以降

Cartan の問題はその後，1 は Münzner により否定的に [23, 24]，2 は野水 [25]，そして高木-高橋 [34] により肯定的に，さらに 3 は尾関-竹内 [26]，および Ferus-Karcher-Münzner [10] より否定的に解決された．野水は日本に Cartan の等径超曲面の仕事を紹介した最初の数学者であり，1973 年，等径超曲面の焦部分多様体が極小であることを示し，また 2 の問題の反例を $(m_1, m_2) = (1, n-1)$ として与えた [25].

これより前 (1971) に，等径超曲面の研究とは独立に，Hsiang-Lawson による球面内の等質超曲面の分類が行われ [12]，それらが階数 2 の対称空間のイソトロピー軌道で得られることがわかった．等質超曲面は主曲率一定だから等径超曲面である．1972 年には高木-高橋 [34] がこれらの主曲率

を計算して，g は 1,2,3,4,6 の値しか取らないことを示した．同時にこれら等質なものについて，主曲率の重複度は高々2種 (m_1, m_2) で，$g = 4$ のとき，$(m_1, m_2) = (1, p-2), (2, 2p-3), (4, 4p-5), (2,2), (4,5), (6,9)$，$g = 6$ のとき，$(m_1, m_2) = (1,1), (2,2)$ のいずれかであることが示された．

このころ Münzner は等径超曲面の法円周上，焦点の生成する 2 面体群の作用で重複度 m_i が不変であることを用い，$m_i = m_{i+2}$ が modulo g で成り立つことを示した．ただし λ_i は大きさの順にならべてある．これからすぐに g が奇数なら重複度は共通であることが分かる．さらに Münzner は S^n 上の等径関数 f が $F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ なる g 次の斉次多項式で

$$\begin{cases} |\mathrm{grad} F|^2 & = g^2 r^{2g-2}, \quad r(x) = |x| \\ \triangle F & = \frac{m_2 - m_1}{2} g^2 r^{g-2} \end{cases}$$

をみたすものを S^n に制限したもので与えられることを示し，これは Cartan-Münzner 関数とよばれるようになった．したがって

Corollary 3.1 S^n の等径超曲面は代数的で，一意的にコンパクト化される．

さらに Münzner は二つの焦部分多様体 $M_\pm$ が球面を $M_\pm$ 上のふたつの円板束に分解することを示し，これから代数トポロジーの議論で $\dim H^*(M, \mathbb{Z}_2) = 2g$, $g = 1,2,3,4,6$ であることを示し，問題 1 を完全に解決した．

さて，次のエポックは 1976 年の尾関-竹内による非等質な等径超曲面の発見であろう [26]．手法は 4 次の Cartan-Münzner 関数の構成で [34] の表にないものをみつけた．ここで使われた Clifford 代数を用い，さらに多くの非等質等径超曲面が [10] でつくられた．後者で注目に値するのは，分類表を用いずに非等質性が示されたことである．実際焦部分多様体の型作用素の核の動きを調べて，等質でないものが判別された．多くの例の構成の中から

Proposition 3.2 [26, 35] $g = 4, (m_1, m_2) = (4,3)$ をみたす等径超曲面で，等質なもの，非等質なものが両方存在する．また微分同型だが合同でない二つの等径超曲面が存在する．

これは $g = 4$ の分類問題の困難性を示すものである．$g = 4$ の等径超曲面の分類問題についての手がかりとしては 1997 年の Stolz の結果がある．

Proposition 3.3 [31] (m_1, m_2) は既知のもので尽くされる．

特に $g = 4$ の等径超曲面で重複度 1，または 2 の主曲率を含むもの（$m_1 \neq m_2$ でもよい）は等質であることが示されている [32], [26]．$g = 6$ の等径超曲面で重複度 1 のものは等質である [7], [20]．

4 等径超曲面から構成される Special Lagrangian submanifolds

4.1 Austere submanifolds

Harvey-Lawson は 1982 年，最小質量をもつカレントの研究として，calibrated geometry を提唱した [13]．ケーラー多様体の複素部分多様体が Wirtinger の定理により体積最小になるという事実を拡張する試みであった．特にシンプレクティック多様体のラグランジアン部分多様体はそのよい候補である．なかでも special Lagrangian submanifolds を構成するアイディアとして，複素部分多様体をまねた austere submanifold の概念が提唱され，多くの最小体積を持つ部分多様体の例が得られた．

Élie Cartan の研究には Gauss 写像が退化する超曲面を一般化した定曲率部分多様体論があるが，我々は最近この Gauss 写像が退化する球面内の超曲面を研究（5 参照）する中で，austere submanifold に遭遇し，またそのよい例として極小等径超曲面やその焦部分多様体があげられること，従ってこれらが special Lagrangian submanifolds の例を多数与えることに気づいた [15]．以下，これについて述べる．

定義 球面 S^N の部分多様体 M^n が austere $\Leftrightarrow$ M の任意の型作用素は固有値を正負の対でもつ．

必然的に austere submanifold は極小部分多様体である．g 個の主曲率をもつ等径超曲面の主曲率は

$$\lambda_i = \cot(\theta + \frac{i-1}{g}\pi) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{g}, 1 \le i \le g$$

で与えられる．特に $\theta = \frac{\pi}{2g}$ のとき，すなわち極小等径超曲面の時は $\lambda_{g-i} = -\lambda_i$ となり，austere である．さらに焦部分多様体 $M_\pm$ の型作用素がアイソスペクトラル，すなわち固有値 $\mu_i^\pm$ が法方向のとりかたによらないことがよく知られ，それは

$$\mu_i^\pm = \frac{1+\lambda_\pm\lambda_i}{\lambda_\pm - \lambda_i}, \quad \lambda_\pm \text{は最大最小主曲率で} \lambda_i \ne \lambda_+ \text{または} \lambda_i \ne \lambda_-$$

から得られる．この形が Cartan の基本公式 Proposition 2.3 に現れたものである．これから焦部分多様体の極小性より強い austere 性がただちに

得られる．実際 g の値に応じて

$$
\begin{aligned}
g = 2 &\Rightarrow \mu_i = 0 \\
g = 3 &\Rightarrow \mu_i = \pm 1/\sqrt{3} \\
g = 4 &\Rightarrow \mu_i = \pm 1, 0 \\
g = 6 &\Rightarrow \mu_i = \pm\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, 0
\end{aligned}
$$

がわかる．

Proposition 4.1 [15] 極小等径超曲面および，等径超曲面の焦部分多様体は *austere submanifold* である．

4.2 Special Lagrangian submanifolds

$\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ の自然な複素構造を J，ケーラー形式を $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ とする．$(\mathbb{C}^n, \omega)$ はシンプレクティック多様体である．

定義 向き付けられた実 n 平面 $\zeta \subset \mathbb{C}^n$ が *Lagrangian*
　$\Leftrightarrow$ すべての $u \in \zeta$ に対して $Ju \perp \zeta$
　$\Leftrightarrow \omega|_\zeta = 0$

　$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準正規直交基底とするとき，$\mathbb{C}^n$ の任意の正規直交基底 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ のはる実 n 平面 $\zeta = \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n$ に対し，ユニタリ群の元 $U \in U(n)$ が存在して，$\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n \wedge J\varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge J\varepsilon_n = U(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge Je_1 \wedge \cdots \wedge Je_n)$ とかける．$\zeta_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \mathbb{R}^n$ とおく．

定義 向き付けられた実 n 平面 $\zeta \subset \mathbb{C}^n$ が *special Lagrangian*
　$\Leftrightarrow \zeta$ は Lagrangian で，$SU(n)$ の元 A が存在して $\zeta = A\zeta_0$.

　"special" が special unitary の special であることに注意しよう．さて変分法の視点から，

Theorem 4.2 (HaL) $\alpha = \Re dz = \Re dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ は *comass one,* すなわち $\alpha(\zeta) \leq |\zeta|$ で等号は ζ が *special Lagrangian* の時に限る．

　多様体上の comass one の閉 n 次形式を special Lagrangian caribration という．$\alpha = \Re dz$ は special Lagrangian caribration である．

定義 $\mathbb{C}^n$ の向き付けられた n 次元部分多様体 M が special Lagrangian
　$\Leftrightarrow$ すべての接空間 T_pM が special Lagrangian

　このときおなじホモロジー類の中で M が体積最小であることは次のようにしてすぐに分かる．M, M' が $\partial M = \partial M'$ をみたし，$H_n(M, \mathbb{R})$ に

おいて $[M-M']=0$ であるとき $\alpha(T_pM)=|T_pM|=1$, $d\alpha=0$ および $\alpha(T_pM')\le|T_pM'|$ を用いて

$$\mathrm{vol}(M)=\int_M\alpha=\int_{M'}\alpha\le\mathrm{vol}(M').$$

よく知られている事実として

Theorem 4.3 (HaL) M を多様体 X の部分多様体とするとき，M の法束 NM は T^*X に自然にはいるシンプレクティック構造に対する *Lagrangian submanifold* である．特に

（1）$X=\mathbb{R}^n$ のとき，NM は $T^*\mathbb{R}^n$ の *Lagrangian submanifold* で，これが *special* $\Leftrightarrow$ M は *austere*．このとき M は極小部分多様体である．

（2）M を S^{n-1} のコンパクトな *austere submanifold* とすると

$$CN(M)=\{(tx,s\nu(x))\in\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n\mid x\in M,t,s\in\mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{R}^{2n}$ の n 次元 *special Lagrangian cone*．ただしここで $\nu(x)$ は M の S^{n-1} における単位法ベクトルすべてをとる．

（2）は M が S^{n-1} の austere submanifold ならそのコーン $CM=\{tx\mid x\in M,t\in\mathbb{R}\}$ は austere だから（1）よりただちにわかる．

Corollary 4.4 Σ を S^3 のコンパクト極小曲面とするとき，$CN(\Sigma)$ は $\mathbb{R}^8$ の 4 次元 *special Lagrangian cone* である．

特に Σ として Lawson のコンパクト極小曲面 [17] をとれば，様々な special Lagrangian submanifolds がえられ，これらの原点における特異性もいろいろな形で現れる．[13] ではさらに次の例が与えられている．

（1）$S^2\to S^n$ を定曲率の極小球面（等質である）とする．とくにヴェロネーズ曲面 $V\cong P\mathbb{R}^2\subset S^4$ から $\mathbb{R}^{10}$ の中の $\mathbb{R}^5$ と同相な special Lagrangian cone を得る．

（2）Clifford 超曲面 $S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{2n-1}\subset\mathbb{R}^{2n}$ の主曲率は ±1 だから $CN(S^{n-1}\times S^{n-1})$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の special Lagrangian cone である．

我々はただちにいずれの例も等径超曲面に関係していることに気づく．実際 4.1 からより一般に次を得る．

Proposition 4.5 [15] M を S^{n-1} の極小等径超曲面，または等径超曲面の焦部分多様体とする．このとき $CN(M)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の *special Lagrangian cone* である．

したがって我々は極小等径超曲面，およびその焦部分多様体から，無限個の等質，および非等質な special Lagrangian cone を得る．

5　Gauss 写像の退化性と等径超曲面

石川剛郎は球面，または実射影空間の Gauss 写像が退化する等質超曲面は Cartan 超曲面と射影同値であることを示した [14].

定義 連結 ℓ 次元部分多様体 $f : M \to S^n$，または $f : M \to \mathbb{RP}^n$ の Gauss 写像が退化する $\Leftrightarrow$ Gauss 写像 $\gamma : M \to G_{\ell+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ が ℓ より小さい階数をもつ.

これは射影変換で不変な概念である [1, 2] が我々は多くの例を得るという立場から，以下ではリーマン幾何学を用いて考察する．S^n の Gauss 写像が退化する部分多様体から 2 重被覆 $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ で $\mathbb{RP}^n$ の同様な部分多様体が得られるので，ここでは話を球面の部分多様体に限る．リーマン幾何学的には Gauss 写像が退化する部分多様体は，型作用素が固有値 0 をもち，さらにすべての型作用素に共通の 0 固有方向が存在することで特徴付けられる．ちなみに $\mathbb{R}^3$ の Gauss 写像が退化する曲面は，平面，円柱，円錐，そして，空間曲線の接包絡面であるが，いずれも非コンパクトであるか，特異点をもつ．ここでは S^n の Gauss 写像が退化する部分多様体で，コンパクト非特異なものに対象を絞る．

Gauss 写像が退化すると，退化次数が一定の領域は全測地的球面でフォリエイトされる．退化次数が大きい（＝階数が非常に小さい）と，部分多様体はそれ自身全測地的になってしまうが， Ferus [9] により，次のことが知られている．

Proposition 5.1 [9] 球面内の連結コンパクトな ℓ 次元部分多様体 $f : M \to S^n$ に対し， r を Gauss 写像 γ の最大階数とする時，ℓ のみに依存する Ferus 数とよばれる数 $F(\ell)$ が存在して， $r < F(\ell)$ ならば $r = 0$ となり，$M = S^\ell$ で $f(M)$ は全測地的.

Ferus 数は Adams 数 $A(k)$ を用いて，

$$F(\ell) := \min\{k \mid A(k) + k \geq \ell\},$$

で与えられる．ここに $A(k)$ は S^{k-1} 上の線形独立なベクトル場の最大個数で，$k = (2m+1)2^{c+4d}$ と分解すると

$$A((2m+1)2^{c+4d}) = 2^c + 8d - 1, \quad \text{ここに } 0 \leq c \leq 3, 0 \leq d.$$

で与えられる．

我々は次の問題を考える．

問題: 不等式 $r < F(\ell)$ は $r = 0$ を結論する最適値を与えるか？すなわち等号 $r = F(\ell)$ をみたす全測地的でない Gauss 写像が退化する部分多様体は存在するか？

この問題は Cartan 超曲面により肯定的に解決される．この場合，$\ell = 3, 6, 12, 24$ に対しそれぞれ $r = 2, 4, 8, 16$ となり，これは $F(\ell)$ に一致している．さらに一般の等径超曲面，またはその焦部分多様体によっても $r = F(\ell) < \ell$ をみたす多くの例が与えられるので結果だけを述べよう．等径超曲面以外からも多くの例がつくられる [15].

超曲面の Gauss 写像が退化するのは主曲率 0 をもつときで，等径超曲面なら g は奇数でなければならないから，全測地的でなければ Cartan 超曲面のみである．等径超曲面の焦部分多様体 $M_\pm$ の Gauss 写像が退化するのは 4.1 において型作用素が固有値 $\mu_i^\pm = 0$ をもつときで，$g = 2, 4, 6$ がその候補となる．$g = 2$ なら $M_\pm$ は全測地的である．$g = 6$ で等質ならば，焦部分多様体 $M_\pm$ はいずれも Gauss 写像が退化している [21]. これらは対称空間 $G_2/SO(4)$ または $G_2 \times G_2/G_2$ のイソトロピー軌道で与えられ，しかも Ferus の等式を $(\ell, r) = (5, 4), (10, 8)$ としてみたしている．

[26], [10] で与えられた $g = 4$ の等径超曲面の例において，主曲率 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を，λ_{odd} と λ_{even} の重複度が $m_1 \leq m_2$ となるよう，大きさの順に並べる．[26] にある例は [10] で次のように分類された．

(i) Clifford 型の等質超曲面 : $(m_1, m_2) = (1, k), (2, 2k-1), (4, 4k-1), (6, 9)$

(ii) Clifford 型でない等質超曲面：$(m_1, m_2) = (2, 2), (4, 5)$

(iii) Clifford 型の非等質超曲面: $(m_1, m_2) = (3, 4k), (7, 8k)$

[10] に従って $\dim M_- = 2m_1 + m_2$，$\dim M_+ = m_1 + 2m_2$ とおく．

Proposition 5.2 [15] M を $g = 4$ の等質超曲面とする．$(m_1, m_2) = (1, k-2)$，$k \geq 3$ のとき，焦部分多様体 M_+ の Gauss 写像は退化し，$(\ell, r) = (2k-3, 2k-4)$ が成り立つ; 他方 M_- の Gauss 写像は退化しない．$(m_1, m_2) = (2, 2k-3), (4, 4k-5)$，$k \geq 2$ のとき，M_- の Gauss 写像は退化し，$(\ell, r) = (2k+1, 2k), (4k+3, 4k)$ が成り立つ; 他方 M_+ の Gauss 写像は退化しない．とくにこれらから無限個の Ferus の等式を満たす Gauss 写像の退化する部分多様体が得られる．

実際，$p \geq 1$，$q \geq 2$ ならば $F(2^p + 1) = 2^p$，$F(2^q + 3) = 2^q$ が成り立つので，$(m_1, m_2) = (2, 2^p - 3)$, $p \geq 2$, $(4, 2^q - 5)$, $q \geq 3$ をみたす等径超曲面の焦部分多様体 M_- がその例を与えている．

Proposition 5.3 [15] M を $g=4$ の等質超曲面とする．$(m_1, m_2) = (2, 2)$ のとき，焦部分多様体 M_+ の Gauss 写像は退化し，$(\ell, r) = (6, 4)$ が成り立つのでこれは Ferus の等式を満たす; 他方 M_- の Gauss 写像は退化しない．$(m_1, m_2) = (4, 5)$ では M_- の Gauss 写像は退化し，$(\ell, r) = (13, 12)$ をみたすが，M_+ の Gauss 写像は退化しない．

(iii) の型の非等質な等径超曲面については，M_+ の Gauss 写像が退化しないことが [10] Theorem 5.8 からわかる．Clifford 型の他の場合を考察するのは興味ある今後の課題であり，$g=4$ の分類問題にも関係しそうである．

References

[1] M. A. Akivis, *On multidimensional strongly parabolic surfaces,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **5** (1987), 3–10 = Soviet Math., **31–5** (1987) 1-11.

[2] M. A. Akivis and V. V. Goldberg, *Projective differential geometry of submanifold*, North-Holland Math. Lib., **49**, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[3] É. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dan les espaces à courbure constante*, Ann. di Mat., **17** (1938) 177–191.

[4] É. Cartan, *Sur des familles remarkables d'hypersurfaces isoparamétriques dan les espaces sphérique*, Math. Z., **45** (1939) 335–367.

[5] É. Cartan, *Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces*, C. R. Congrès Math. Liège(1939) 30–41.

[6] É. Cartan, *Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphèriques à 5 et à 9 dimensions*, Revista Univ. Tucumán **1** (1940) 5–22.

[7] J. Dorfmeister and E. Neher, *Isoparametric hypersufaces, case* $g = 6$, $m = 1$, Comm. in Alg. **13** (1985) 2299–2368.

[8] D. Ferus, *On the type number of hypersurfaces in spaces of constant curvature,* Math. Ann. **187** (1970), 310–316.

[9] D. Ferus, *Totally geodesic foliations*, Math. Ann. **188** (1970) 313-316.

[10] D. Ferus, H. Karcher and H. F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen*, Math. Z. **177** (1981) 479–502.

[11] K. Grove and S. Helperin *Dupin hypersurfaces, group actions and the double mapping cylinder*, J. Dff. Geom., **26** (1987) 429–459.

[12] W.Y. Hsiang and B. Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geom., **5** (1971) 1–38.

[13] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated Geometries*, Acta. Math. **148** (1982) 47-157.

[14] G. Ishikawa, *Developable hypersurfaces and homogeneous spaces in a real projective space*, Lobachevskii J. Math., **3** (1999) 113-125.

[15] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, *Submanifolds with degenerate Gauss mappings in spheres*, preprint (2000)

[16] E. Laura, *Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinito*, Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio, (1918) 253–278.

[17] H.B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math., **92** (1970) 335–374.

[18] T. Levi-Civita, *Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **XXVI** (1937) 657–664.

[19] R. Miyaoka, *The linear isotropy group of $G_2/SO(4)$, the Hopf fibering and isoparametric hypersurfaces,* Osaka J. of Math., **30**,(1993), 179–202.

[20] R. Miyaoka, *A new proof of the homogeneity of isoparametric hypersurfaces with $(g,m) = (6,1)$,* Geometry and Topology of Submanifolds X (eds.C.H.Chen, A.M.Li, U. Simon, L. Verstraelen, C.P.Wang, M. Wiehe) World Scientific, (2000) 178–199.

[21] R. Miyaoka, *Homogeneity of isoparametric hypersurfaces with six principal curvatures*, preprint.

[22] 宮岡礼子, **等径超曲面再訪**, 数学 **53** (2001) 18–33.

[23] M. F. Münzner *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I*, Math. Ann., **251** (1980) 657–664.

[24] M. F. Münzner *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II*, Math. Ann., **256** (1981) 215–232.

[25] K. Nomizu, *Some rresults in E. Cartan's theory of isoparametric families of hypersurfaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1973) 1184–1188

[26] H. Ozeki and M. Takeuchi, *On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II*, Tohoku Math. J., **28** (1976), 7–55.

[27] 尾関英樹, 高木亮一, 竹内勝, 等径超曲面について, 数学, **30** (1978) 23–32

[28] B. Segre, *Una proprietá caratteristixca di tre sistemi* ∞^1 *di superficie*, Atti Acc. Sc. Torino, **LIX** (1924) 666–671.

[29] B. Segre, *Famiglie di ipersuperfie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **XXVII** (1938) 203–207.

[30] C. Somigliana, *Sulle relazione fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica*, Atti. Acc. Sc. Torino,**LIV** (1918-19) 974–979.

[31] S. Stolz, *Multiplicities of Dupin hypersurfaces* , Preprint, Max-Planck-Institut für Math., Bonn, (1997)

[32] H. Takagi, *A class of hypersurfaces constant principal curbatrures in a sphere*, J. Diff. Geom., **11** (1976) 225–233.

[33] G. Thorbergsson, *A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations*, Handbook of Differential Geometry (eds. F. Dillen and P. Verstraelen), Elsevier Science, (2000) 963–995.

[34] R. Takagi and T. Takahashi, *On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere,* Diff. Geom. in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, (1972), 469–481.

[35] Q.W. Wang, *On the topology of Clifford isoparametric hypersurfaces*, J. Diff. Geom., **27** (1988) 55–66.

[36] F. L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties,* Translations of Math. Monographs **127**, Amer. Math. Soc., Providence (1993).

Reiko MIYAOKA
Department of Mathematics,
Sophia University
Kioi-cho, Chiyoda-ku, 102-8554 Tokyo, JAPAN
E-mail Address: r-miyaok@hoffman.cc.sophia.ac.jp